Diplomarbeit bei Prof. Dr. Rolf Klein and Dr. Elmar Langetepe

Csilla Bükki

Das Voronoi Spiel

Gleiderung des Vortrags

1. Darstellung des Voronoi Spieles

2. Ergebnisse im Kreis

3. Ergebnisse auf der Kugeloberfläche

4. Einige Charakteristiken des Spieles

Das Voronoi Spiel:

1. $P = \{p_0, p_1, ..., p_{n-1}\}$ in einem Gebiet Ω, Zähler $c = 0$
2. $P_{(c \mod n)}$ – Maximieren des Euklidischen Abstandes zu seinem nächsten Nachbarn.
3. $c = c + 1$
4. zurück zu 2.

Frage: Was passiert mit den Punkten in Ω, falls $\lim c \to \infty$ ist?

Es werden die folgenden zwei Spezialfälle untersucht:

1. Der Abschluss eines Kreises in $\mathbb{R}^2$, also liegen die Punkte innerhalb oder am Rand des Kreises. o.B.d.A betrachten wir den Einheitskreis.

$$\Omega = \{(p_x, p_y)^t | p_x^2 + p_y^2 \leq 1, p_x \in \mathbb{R}, p_y \in \mathbb{R}\}.$$

2. Der Rand einer Kugel in $\mathbb{R}^3$, also liegen die Punkte auf der Kugeloberfläche. O.B.d.A betrachten wir die Einheitskugel.

$$\Omega = \{(p_x, p_y, p_z)^t | p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = 1, p_x \in \mathbb{R}, p_y \in \mathbb{R}, p_z \in \mathbb{R}\}.$$

Einige bekannte Definitionen

1. Der Euklidische Abstand - sphärische Abstand
2. Der (sphärische) Bisektor
3. Die (sphärische) Voronoi-Region
4. Das (sphärische) Voronoi-Diagramm
5. Die (sphärische) Delaunay-Zerlegung

Einige weitere Definitionen

1. Voronoi-Nachbarn, Voronoi-benachbart
2. Voronoi-Nachbarschaftbeziehung
3. Sprung: Veränderung in der Nachbarschaftbeziehung
4. Der stabile Zustand der Punkte
5. Der minimale Abstand

   $$D(P) = min_{i,k=0,..,n-1,i \neq k} |p_i p_k|$$

   $$\text{mit } P = \{p_0, ..., p_{n-1}\}$$

Anwendung des Voronoi-Diagramms

1. In beiden Fällen kann der neue Punkt mit Hilfe des Voronoi-Diagramms der restlichen Punkte gefunden werden.

Definition: Der neue Punkt hat die neu gewählte Position des beweglichen Punktes.

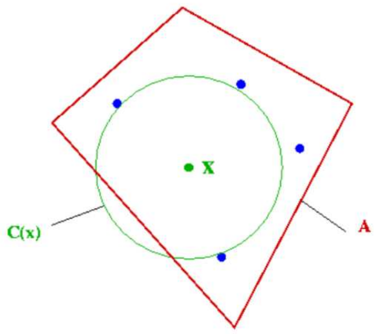
2. Im Fall der Kugeloberfläche kann das Polyeder gezeichnet werden, falls man die Voronoi-Nachbarschaftbeziehung der Punkte kennt.

Definition: konvexes Polyeder – konvexe Hülle

- Kreis -

Störquellen Problem: Störquellen Problem mit dem größten leeren Kreis: Sei ein Gebiet A als ein konvexes Polygon mit m Ecken und seien n Punkte $S = \{p_0, ..., p_{n-1}\}$ in der Ebene als Störquellen gegeben. Die Aufgabe ist einen maximalen leeren Kreis zu finden, dessen Mittelpunkt in A liegt.

Lemma: Sei $C(x)$ der größte Kreis mit in Polygon A liegenden Mittelpunkt x, der keinen Punkt aus S in seinem Inneren enthält. Dann ist x ein Voronoi-Knoten von $V(S)$, ein Schnittpunkt einer Voronoi-Kante mit dem Rand von A oder ein Eckpunkt von A.



- Kreis -

Satz: Sei p der aktuelle bewegliche Punkt, und wir halten die restlichen $n-1$ Punkte fest. Für die Wahl des neuen Punktes gibt es folgende Kandidaten:

1. Der neue Punkt ist ein Voronoi-Knoten des Voronoi-Diagramms der festen Punkte.
2. Der neue Punkt liegt am Kreisrand.
3. Die Position von p ändert sich nicht.

Beweis!

- Kugeloberfläche -

Satz:

- Die Bedingungen wie im Fall des Kreises
- Die Wahl des neuen Punktes:
  - Ein Voronoi-Knoten des sphärischen Voronoi-Diagramms der restlichen $n-1$ Punkte.
  - Die Position des beweglichen Punktes ändert sich nicht.

Der neue Abstand ist größer als der alte:
Das vorherige Lemma auf der Kugeloberfläche mit sphärischem Kreis und Voronoi-Diagramm angewendet.

- Kugeloberfläche -

Bestimmung des Polyeders – der konvexen Hülle der Punkte:

Satz: Das Delaunay-Polyeder: Zwei Punkte auf der Kugeloberfläche sind genau dann Voronoi-benachbart, falls sie mit einer Polyeder-Kante verbunden sind.

Beweisskizze:

- Einige Punkte liegen in einer Ebene.
- Jede Polyeder-Kante ist eine Delaunay-Kante.
- Jede Delaunay-Kante ist eine Polyeder-Kante.

1-dimensionaller Fall am Kreisrand

Satz:

- Der Ablauf des Spieles hat zwei Phasen.
- $c < k \in \mathbb{N} \Rightarrow$ es kann Sprung vorkommen.
- $c \geq k \Rightarrow$ kein Sprung.

Lemma:

- v_g, der größte Winkel, wird kleiner oder gleich.
- $v_g < \frac{2\pi}{n-1} \Rightarrow$ kein Sprung.

Lemma: Die maximale Anzahl der Sprünge s endlich und $s \in O(log n)$.

1-dimensionaller Fall am Kreisrand

Satz:

- Annahme: es kann kein Sprung mehr vorkommen.
- Das Verfahren konvergiert.
- $v_i \to \frac{2\pi}{n} \qquad i \in 1, ..., n.$

Beweisskizze: Ein Iterationsschritt besteht nun aus zwei Schritte:

- Winkelhalbierung mit lineare Abbildung (Matrix A)
- Umnummerierung der Winkel mit Permutationsmatrix (Matrix B)

$$M = BA := \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Zu Zeigen ist:

$$v' = \lim_{k \to \infty} M^k v = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{n} \\ \vdots \\ \frac{2\pi}{n} \end{pmatrix}$$

ist, da $\sum_{i=1}^{n} v_i = 2\pi$.

Bemerkung : Die Abbildung M ist linear!

2-dimensionaller Fall im Kreis

$n \in \{2, ..., 5\}$:

- Alle n Punkte wandern zuerst auf dem Rand
- Nachher ist das Verhalten wie in 1-dim. Fall
- Die Winkel zwischen benachbarten Punkten: $\frac{2\pi}{n}$

$n = 6$:

- $n - 1$ Punkte wandern auf dem Rand, ein Punkt p zum Zentrum
- Der Punkt p bleibt im Zentrum
- Die Winkel zwischen benachbarten Punkten: $\geq 60°$

2-dimensionaller Fall im Kreis

$n \in \{7, ..., 9\}$:

- $n - 1$ Punkte wandern auf dem Rand, ein Punkt p zum Zentrum
- Der Punkt p bleibt im Zentrum, die restliche Punkte verhalten sich wie in 1-dim. Fall
- Die Winkel zwischen benachbarten Punkten: $\frac{2\pi}{n}$

$n = 10$:

- Zwei Punkte im Inneren des Kreises, weit vom Zentrum
- Restliche Punkte am Rand

2-dimensionaller Fall im Kreis

$n > 10$:

- Mehr als zwei Punkte im Inneren des Kreises
- Restliche Punkte am Rand

Anzahl der Punkte gross:

- Ein hexagonal ähnlicher Netz
- Die Punkte sind regelmäßig im Kreis verteilt
- Der durchschnittliche Eckengrad zwischen 5 und 6
- Die durchschnittliche Packungsdichte beträgt $0,7$

Die sphärische Trigonometrie

Großkreise: Alle Kreise der Kugel, deren Mittelpunkt mit dem der Kugel identisch sind.

Das sphärische Dreieck: Ein von drei Großkreisen berandeten Kugeldreieck.

Einige Sätze:

- Seiten-Cosinus-Satz
- Winkel-Cosinus-Satz
- Sinus-Satz
- Cotangens-Satz

Die halbreguläre Polyeder

1. Reguläre Polyeder:
   - Seitenfläche – gleiche reguläre Polygone
   - An jeder Ecke – gleich viele solche Polygone
2. Halbreguläre Polyeder:
   - Seitenfläche – reguläre Polygone
   - Mit Drehung des Polyeders auf sich – zwei Ecken ineinander überführbar

3. Prismen: Zwei regelmäßigen n-Ecken – durch n Quadrate verbunden
4. Antiprismen: Zwei regelmäßigen n-Ecke – versetzt angeordnet,
   durch reguläre Dreiecke verbunden.

Ergebnisse auf der Kugeloberfläche

stabile und instabile Polyeder

$n = 2$: Pol-Gegenpol Beziehung im stabilen Zustand

$n = 3$:

- Das regelmäßige Dreieck auf einem Großkreis ist stabil
- Konvergenz gegen solches regelmäßiges Dreieck

$n = 4$:

- Das reguläre Tetraeder ist stabil
- Das regelmäßige Quadrat stabil mit Seitenlänge $\sqrt{2}$
- Generisch: Konvergenz gegen das reguläre Tetraeder

Überlegung zum Tetraeder

Mit dem Ansatz: sei der Eckpunkt beweglich und seien die Eckpunkte p_2, p_3, p_4 fest.

Die Innenwinkel seien in einem Vektor $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_{12})$ gegeben.

Die Abbildung $f : \alpha \to \alpha$ gibt die neue Innenwinkel an. (Anwendung einiger Sätze der sphärischen Trigonometrie)

Die Abbildung $g : \alpha \to \alpha$ permutiert die Innenwinkel 3 Stelle weiter.

$$\lim_{k \to \infty} F^{(k)}(\alpha) = (120^\circ, ..., 120^\circ)^t \quad \text{mit} \quad F = g \circ f$$

Bemerkung : Diese Abbildung ist leider nicht linear!

Ergebnisse auf der Kugeloberfläche

$n = 5$:

- Die Pyramide ist stabil
- Konvergenz gegen die Pyramide

$n = 6$:

- Das Oktaeder und das Prisma sind stabil
- Konvergenz meistens gegen das Oktaeder, seltener gegen das Prisma

$n = 8$:

- Der Würfel und das Antiprisma sind stabil
- Konvergenz meistens gegen das Antiprisma, sehr selten gegen den Würfel

Ergebnisse auf der Kugeloberfläche

$n = 11$:

- Die Krone ist stabil
- Konvergenz anscheinend gegen die Krone

$n = 12$:

- Das Ikosaeder und das Kuboktaeder sind stabil
- Das abgestumpfte Tetraeder ist instabil
- Konvergenz meistens gegen das Ikosaeder, sehr selten gegen das Kuboktaeder

$n = 14$:

- Der Pyramidenwürfel ist stabil
- Konvergenz gegen den Pyramidenwürfel?

Ergebnisse auf der Kugeloberfläche

$n = 20$:

- Das Dodekaeder ist stabil
- Konvergenz nicht gegen das Dodekaeder
- Sondern gegen ein Polyeder mit größerem minimalen Abstand als des Dodekaeders

$n = 24$:

- Das Rhombenkuboktaeder und der abgeschrägte Würfel sind stabil
- Der abgestumpfte Würfel und das abgestumpfte Oktaeder sind instabil
- Konvergenz gegen das Rhombenkuboktaeder oder den abgeschrägten Würfel?

Ergebnisse auf der Kugeloberfläche

$n = 30$:

- Das Ikosidodekaeder ist stabil
- Konvergenz nicht gegen das ikosidodekaeder

$n = 60$:

- Das abgestumpfte Ikosaeder (Fußball) ist stabil
- Konvergenz nicht gegen das Fußball

Die Prismen und Antiprismen:

- Prismen mit $n < 12$ sind stabil
- Antiprismen mit $n < 10$ sind stabil

- stabiler Zustand -

- Der durchschnittliche Eckengrad zwichen 5 und 6
- hexagonal-ähnlichen Netz
- Seitenpolygone sind meistens Dreicke, Vielecke, seltener Fünfecke.
- Die durchschnittliche sphärische Packungsdichte beträgt $0,76$.

$$d_s = \frac{n \cdot Vol(sph.\ Kreis)}{4\pi} = \frac{n \cdot 2\pi(1 - \cos\alpha)}{4\pi}$$

mit $\alpha = \arcsin \frac{d}{2}$.

Einige Charakteristiken des Spieles

Eine Beschreibungsfunktion $E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist eine monoton wachsende (oder fallende) Funktion während des Verfahrens.

Beispiel für den 1-dimensionalen Fall, die Punkte liegen am Kreisrand:

$$E(v) := \frac{1}{2} \sum_{i,j} (v_i - v_j)^2 = \sum_{i,j} \omega_{i<j}^2 \quad i, j \in \{1, ..., n\}$$

Satz: In jedem Iterationsschritt wird $E(v)$ kleiner oder gleich.

$$\nabla E(v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial E(v)}{\partial v_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial E(v)}{\partial v_n} \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} v_1 - \frac{2\pi}{n} \\ \vdots \\ v_n - \frac{2\pi}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{n} \\ \vdots \\ \frac{2\pi}{n} \end{pmatrix}$$

Der minimale Abstand

Satz:

- Berechnung des minimalen Abstandes, das heißt:
- $D(P) = min_{i,k=0,\ldots,n-1,i \neq k} \quad |p_i p_k|$
- Beschreibungsfunktion für Kreis bzw. Kugeloberfläche

Beobachtung:

- Kreis – stabiler Zustand
- $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq D(P) \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}}, \quad D(P) \approx \frac{2}{\sqrt{n}}$

Der minimaler Abstand:

Satz:

- Kreis – stabiler Zustand
- $D(P) \in O(\frac{1}{\sqrt{n}})$

Beobachtung:

- Kugeloberfläche – stabiler Zustand
- $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \leq D(P) \leq (\frac{2\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{n}})$, n klein
- $D(P) \approx \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{n}}$

Satz:

- Kugeloberfläche – stabiler Zustand
- $D(P) \in O(\frac{1}{\sqrt{n}})$

DANKE!